Capitolo 4 – Il comportamento razionale e la funzione di utilità

Obiettivi del capitolo:
Fornire gli strumenti per la scelta tra attività finanziarie

- Rischio (possibilità di descrivere situazioni possibili mediante probabilità) ≠ Incertezza (scenari non pienamente ipotizzabili o probabilità ignote)
- Avversione al rischio: a parità di varianza dei rendimenti, preferisco attività con rendimento atteso più elevato
- Funzione di utilità definita su rendimento atteso e varianza del rendimento di un’attività

Rischio e incertezza

Rischio (possibilità di descrivere situazioni possibili mediante probabilità)

- Lancio di una moneta che fa vincere 50€ se esce «testa» e perdere 50€ se esce «croce»
  - I due eventi sono equiprobabili (p=50%; 1-p=50%)
  - Gioco equo («fair game») con valore atteso nullo
    - 0,50*50 +0,5*(-50) = 0

Incertezza (scenari non pienamente ipotizzabili o probabilità ignote)

- Stesso lancio, ma siccome la moneta è truccata non si conosce la probabilità dei due eventi

Assumeremo che i mercati finanziari siano descritti da rischio e non incertezza

Funzione di utilità

Per descrivere il comportamento di un investitore nella scelta di attività finanziarie abbiamo bisogno di introdurre la funzione di utilità, definita in base al rendimento atteso (+) e alla varianza del rendimento (-)

$$U = Er \ - 0{,}5 * A * \sigma^2$$

A è il coefficiente di avversione al rischio

- Più grande è A, maggiore la penalizzazione in termini di utilità totale dovuta ad una elevata varianza per dato rendimento atteso

Gli investitori assumono un comportamento «razionale»

- Scelgono tra più opzioni quella caratterizzata da una utilità più elevata
- Non esistono errori comportamentali o emozioni

Funzione di utilità / 2

Scelta tra investimenti con diverso rendimento atteso e differente rischio

Ipotesi:

- 4 investimenti alternativi per rendimento atteso e rischio
- A = 4

$$U = Er - 0{,}5 * A * \sigma^2$$

Investimento	Er	σ	U
1	0,12	0,30	-0,0600
2	0,15	0,50	-0,3500
3	0,21	0,16	0,1588
4	0,24	0,21	0,1518

Se A = 0, il rischio è irrilevante nella scelta ∴ scelgo la #4

Funzione di utilità / 3

Scelta investimento più adatto per differente A (caratteristiche investitore)

Ipotesi:

- Investimento in un’attività «risk-free» con rendimento atteso 2%
- Investimento rischioso con rendimento atteso 10% e varianza 2%

$$U = Er \ - 0{,}5 * A * \sigma^2$$

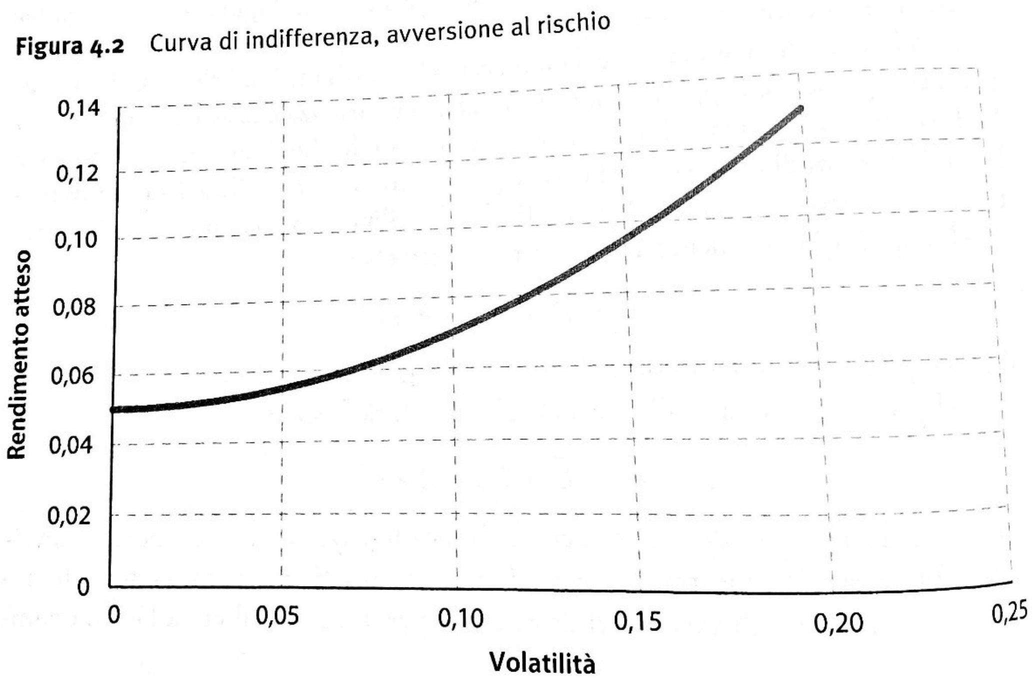
Avversione al rischio	Utilità risk-free	Utilità asset rischioso
4	0,2	0,60
8	0,2	0,02
16	0,2	-0,06

All’aumentare di A si preferisce investimento meno rischioso, a parità di Er

La curva di indifferenza

Una funzione di utilità potrebbe essere disegnata solo in uno spazio a tre dimensioni (U,Er,σ^2)

In alternativa, possiamo usare una curva di livello della funzione di utilità per rappresentare le preferenze dell'investitore



$$\bar{U} = Er - 0,5 * A * \sigma^2$$

$$Er = \bar{U} + 0,5 * A * \sigma^2$$

- Inclinazione positiva
  - Se aumenta il rischio, per mantenere stessa utilità il rendimento atteso deve aumentare
- Convessa

La curva di indifferenza / 2

$$\bar{U} = Er - 0{,}5 * A * \sigma^2$$
$$Er = \bar{U} + 0{,}5 * A * \sigma^2$$

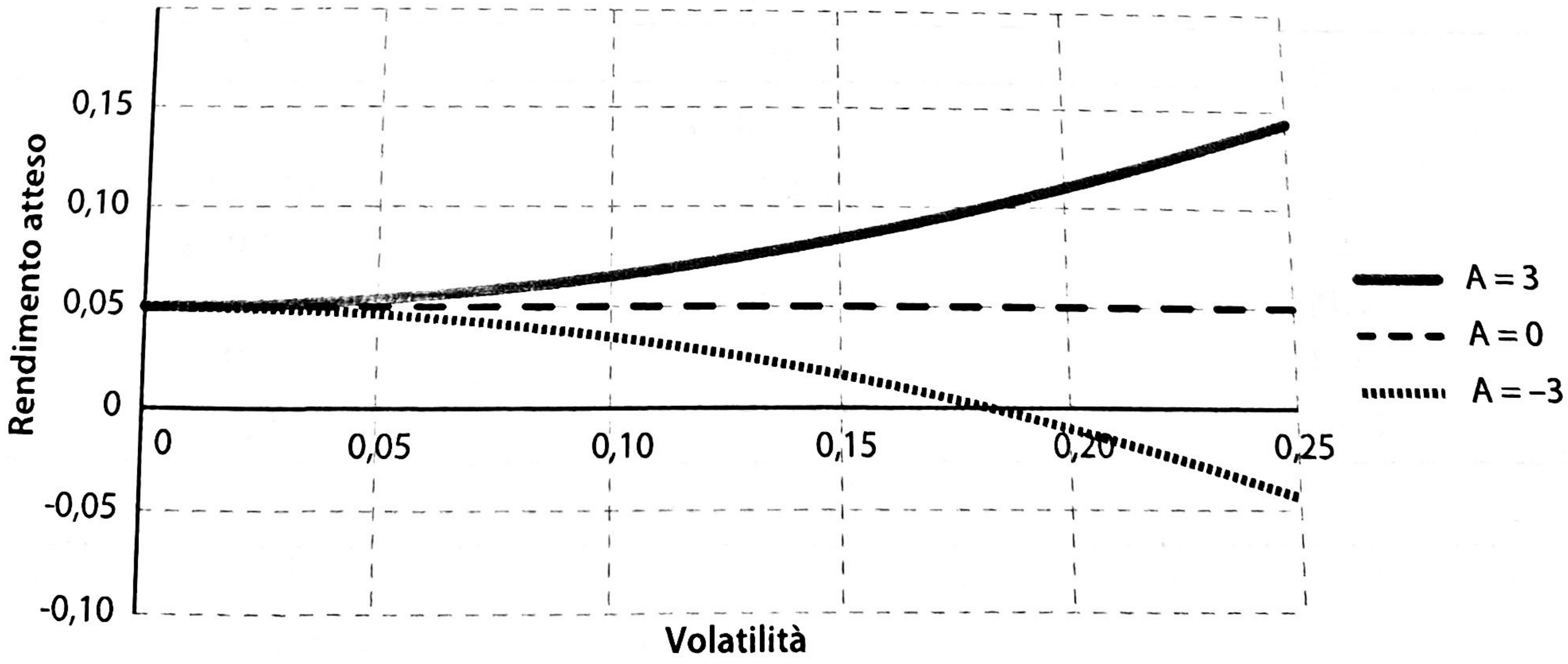
U	σ	σ^2	Er (A=3)	Er (A = 0)	Er (A = -3)
0,05	0	0	0	0,05	0,05
0,05	0,05	0,0025	0,05375	0,05	0,04875
0,05	0,1	0,01	0,065	0,05	0,045
0,05	0,15	0,0225	0,08375	0,05	0,03875
0,05	0,2	0,04	0,11	0,05	0,03
0,05	0,25	0,0625	0,14375	0,05	0,01875

- A=0 curva indifferenza piatta
- A<0 curva indifferenza inclinata –va
  - Amante del rischio: un aumento della volatilità fa crescere l’utilità, e per mantenere utilità costante il rendimento atteso deve diminuire

La curva di indifferenza / 3

$$\bar{U} = Er\ - 0{,}5 * A * \sigma^2;\ Er = \bar{U} + 0{,}5 * A * \sigma^2$$

Figura 4.3 Curve di indifferenza, vari gradi di avversione al rischio



Il premio per il rischio

Se avverso al rischio, non avrebbe senso pagare per partecipare ad una lotteria (lancio di moneta) con due eventi equiprobabili e rendimento atteso nullo

- Un individuo avverso al rischio partecipa ad un gioco rischioso solo se il valore atteso dei vari scenari è positivo
- Un investitore acquista un asset rischioso solo se il suo rendimento atteso è maggiore del rendimento di un asset «risk-free»

Il differenziale tra rendimento asset rischioso e rendimento asset «risk-free» è il premio per il rischio

$$pr_t = E_t\left(r_{t+1} - r_f\right)$$

- La differenza tra il rendimento dell'asset e il tasso senza rischio (<u>eccesso di rendimento</u>) misura il premio al rischio

Il premio per il rischio / 2

$$\bar{U} = Er - 0{,}5 * A * \sigma^2$$

$$Er = \bar{U} + 0{,}5 * A * \sigma^2$$

$$pr_t = E_t\left(r_{t+1} - r_f\right)$$

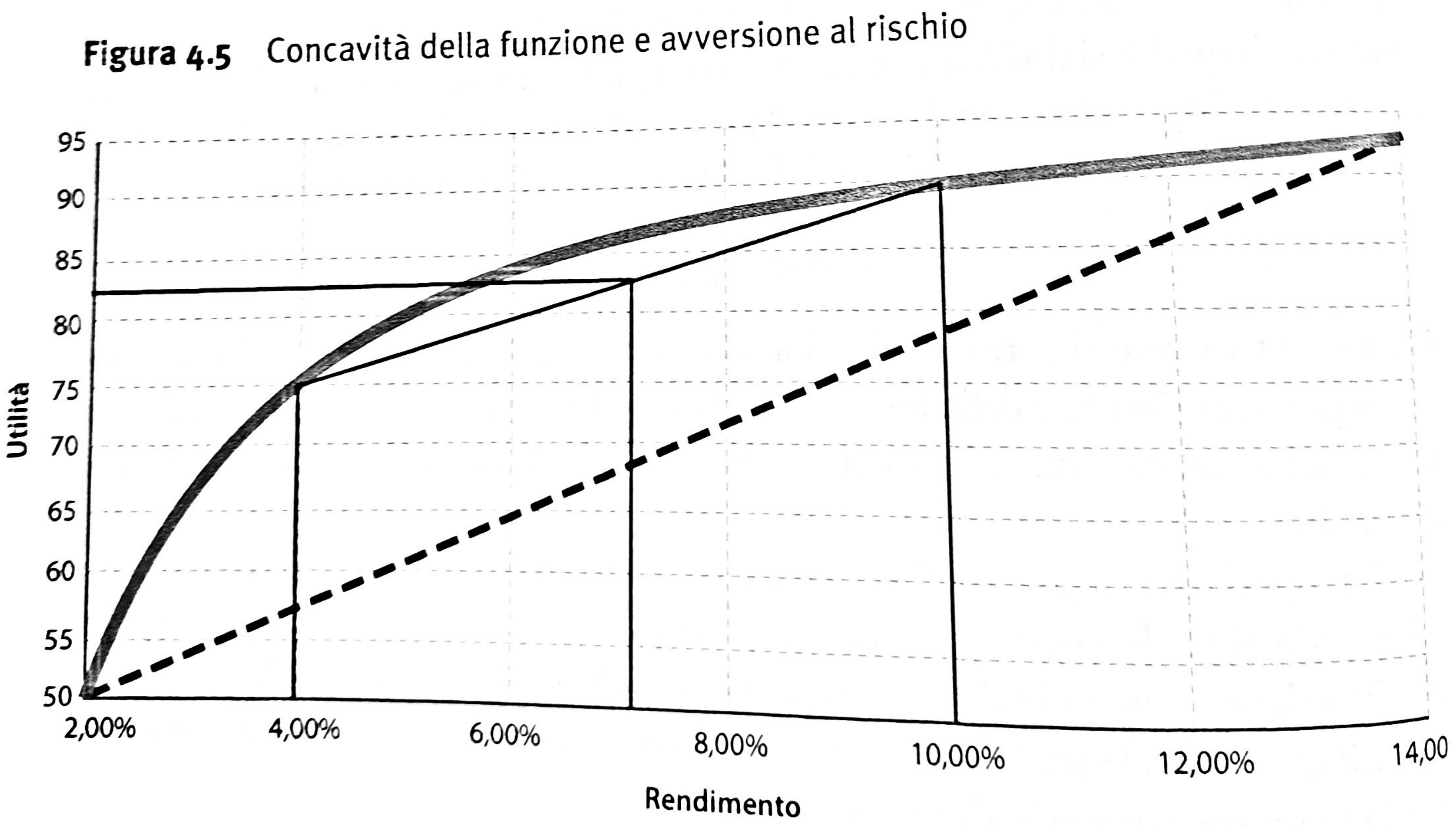
- Un asset risk-free ha rendimento del 5% e l'utilità corrispondente è sempre 5%
- Un asset rischioso, invece, ha una volatilità del 5%

Per un investitore con A=3, i due investimenti sono equivalenti se il rendimento atteso dell'asset rischioso è:

$$0{,}05 + 0{,}5 * 3 * 0{,}05^2 = 0{,}05375 \quad \text{i.e. } 5{,}375\%$$

$$\therefore pr = 0{,}05375 - 0{,}05 = 0{,}00375 \quad \text{i.e. } 0{,}375\%$$

Utilità e avversione al rischio



Per r=4%, U = 75

Per r=10%, U = 90

Per 0,5*0,04+0,5*0,10=7%, U = 82,5

Per r = 7%, U > 85

- Individuo preferisce asset con rendimento certo 7% anziché asset con r=4% p=50% e r=10% p=50%

- Funzione concava: avverso al rischio
- Funzione lineare: neutrale rispetto al rischio
- Funzione convessa: amante del rischio

Utilità CRRA

Una funzione di utilità molto utilizzata è caratterizzata da un coefficiente di avversione al rischio costante in termini relativi (CRRA – constant relative risk aversion):

$$u(W) = \frac{W^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \alpha > 0 \ e \ \alpha \neq 1$$

$$u(W) = \ln(W), \alpha = 1$$

Il coefficiente di avversione al rischio è:

$$CCRA = -W \frac{u''(W)}{u'(W)}$$

Poiché: $u'(W) = \frac{1-\alpha W^{(1-\alpha)-1}}{1-\alpha} = w^{-\alpha}; \ u''(W) = -\alpha W^{-\alpha-1}$

$$CCRA = -W \frac{-\alpha W^{-\alpha-1}}{W^{-\alpha}} = -W \frac{-\alpha}{W} = \alpha$$

Utilità CRRA / 2

$$u(W) = \frac{W^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \alpha > 0 \; e \; \alpha \neq 1$$

$$u(W) = \ln(W), \alpha = 1$$

$$CCRA = -W \frac{u''(W)}{u'(W)}$$

$$CCRA = -W \frac{-\alpha W^{-\alpha-1}}{W^{-\alpha}} = -W \frac{-\alpha}{W} = \alpha$$

- La scelta tra un asset rischioso e un asset risk-free dipende solo dal coefficiente di avversione al rischio
- La scelta è indipendente dal livello del patrimonio (W) del risparmiatore

Utilità CRRA / 3

$$u(W) = \frac{W^{1-\alpha}}{1-\alpha}\ , \alpha > 0\ e\ \alpha \neq 1$$

$$u(W) = \ln(W)\ , \alpha = 1$$

Quanto si paga per assumere un rischio? Per esempio per acquistare un biglietto di una lotteria equa con possibili esiti 500 oppure 1000

Ipotesi: valori $\alpha = (0{,}5;\ 1;\ 3;\ 5)$

Per $\alpha = 1$ calcola: $0{,}5 * \ln(1000) + 0{,}5 * \ln(500)$

Per $\alpha \neq 1$ calcola: $0{,}5 * (1-\alpha)^{-1} 1000^{1-\alpha} + 0{,}5 * (1-\alpha)^{-1}\, 500^{1-\alpha}$

Utilità CRRA / 3

Quanto si paga per assumere un rischio? Per esempio per acquistare un biglietto di una lotteria equa con possibili esiti 500 oppure 1000

Ipotesi: valori $\alpha = \ (0{,}5;\ 1;\ 3;\ 5)$

Per $\alpha = 1$ calcola: $0{,}5 * \ln(1000) + 0{,}5 \ln(500) = \ln(C)$

Per $\alpha \neq 1$ calcola: $0{,}5 * (1-\alpha)^{-1} 1000^{1-\alpha} + 0{,}5 * (1-\alpha)^{-1}\, 500^{1-\alpha} = (1-\alpha)^{-1} C^{1-\alpha}$

CRRA	C
0,5	729
1	707
3	632
5	586

- Se si è molto avversi al rischio (α = 5) si è disposti a pagare solo 586 euro
- Se si è poco avversi al rischio (α = 0,5) si è disposti a pagare fino a 729
- Se si è neutrali rispetto al rischio (α = 0) si è disposti a pagare 750 $(0{,}5 * 500 + 0{,}5 * 1000)$

Utilità intertemporale

Per descrivere il comportamento di un consumatore/investitore che deve decidere non solo come allocare il proprio reddito tra consumo e risparmio ma anche la propria ricchezza tra asset finanziari differenti dobbiamo considerare una funzione di utilità intertemporale

- Descrive l'utilità associata al livello di consumo in vari periodi temporali
- Per semplicità assumiamo che i flussi di utilità siano separabili dal punto di vista temporale
    - ➢ L'utilità del consumo al tempo t è indipendente dall'utilità del consumo a t+1

$$U = \sum_{t=1}^{\infty} (1+\delta)^{-t} u(C_t)$$

- δ è il tasso di preferenza intertemporale, descrive la preferenza per il consumo presente rispetto al consumo futuro